

Teorema dell'ordine.

Sia $F(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado $d \geq 1$

Allora ogni retta di $\mathbb{P}^2$ interseca $\tilde{V}(F)$ in esattamente d punti a meno che essa non sia interamente contenuta in $\tilde{V}(F)$.

* contare con la debita molteplicità.

In $AG_2(\mathbb{C})$ $V(F)$ $f(x, y) = 0$ $\rightarrow$ studia $f(x, ax+b) = 0$
 $\pi_b:$ $y = ax+b$

In $AG_2(\mathbb{C})$ $\pi_b \subseteq V(F)$ oppure $|\pi_b \cap V(F)| \leq d$.

N.B. In $AG_2(\mathbb{R})$ esiste una curva di ordine 2 tale che quasi ogni retta la interseca in 0 punti $x^2 + y^2 = 0$

DIM:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{equazione di } \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{U}}(F)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq d}}^d f_{ij} x_1^i x_2^j x_3^{d-i-j}$$

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq d}}^d f_{ij} x^i y^j$$

$\mathcal{C}$ = retta di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \rightarrow$ sottospazio 2 dimensionale

quattro da 2 punti $P \neq Q$

$$P = [(x'_1, x'_2, x'_3)]$$

$$Q = [(x''_1, x''_2, x''_3)]$$

$$X \in \mathbb{P}^2 \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2 \text{ s.t. } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}((x_1', x_2', x_3'), (x_1'', x_2'', x_3'')).$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$\uparrow$
punto generico di $\mathbb{P}^2$.

$$\text{SOSTITUIAMO IN } F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda x_1' + \mu x_1'', \lambda x_2' + \mu x_2'', \lambda x_3' + \mu x_3'').$$

Oss: $G(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo in λ e μ .

$$1) \quad G(\lambda, \mu) \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda A \Leftrightarrow \lambda' X' + \mu X'' \in \tilde{V}(F) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tau \in \tilde{V}(F).$$

2) $G(\lambda, \mu) \neq 0 \Rightarrow G(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo di grado d .

$$(*) \quad G(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^d g_i \lambda^i \mu^{d-i}$$

Dobbiamo fare vedere che $\exists d$ punti che soddisfano
 (*) cioè $\exists d$ classi di prop. di (λ, μ) che soddisfano
 l'equazione.

2.1 $g_0 \neq 0 \Rightarrow G(x, \mu) = g_0 \mu^d + x \sum_{i=1}^d x^i \mu^{d-i} g_i$

In particolare $(x, \mu) = (0, 1)$ non
può essere soluzione di $G(x, \mu) = 0$

$$G(0, 1) = g_0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ OSSERVIAMO CHE POSSIAMO DIVIDERE PER x^d

ED ABBIAMO

$$H(\xi) = \sum_{i=0}^d g_i \frac{\mu^{d-i}}{x^{d-i}} = \sum_{i=0}^d g_i \xi^{d-i}$$

AD OGNI SOLUZIONE $[(x, \mu)]$ di $G(x, \mu) = 0$ corrisponde
una soluzione ξ di $H(\xi) = 0$ e viceversa

$[L(x, \mu)]$ resolve $G(x, \mu) = 0$

$$\Rightarrow [L(1, \frac{\mu}{x})] \text{ resolve } G(1, \mu/x) = H(\mu/x).$$

viceversa $H(x) = 0 \Rightarrow [L(1, x)]$ resolve $G(x, \mu) = 0$

$\Rightarrow$ ok.

HA $\deg H(x) = d$ e $H(x)$ è un polinomio in coeff.

in $\mathbb{C} \Rightarrow$ per il teorema fondamentale dell'algebra

$H(x) = 0$ ammette d radici $\square$

2.2 Supponiamo $g_0 = g_1 = \dots = g_k = 0$ e $g_{k+1} \neq 0$

$$G(x, \mu) = x g_{k+1} x^{k+1} \mu^{d-k-1} + \dots + g_d \mu^d x^d =$$

$$= \sum_{k=1}^{k+1} \left(g_{k+1} \mu^{d-k-1} + \dots + g_d \mu^{d-k-1} \right) \quad \hookrightarrow S(\lambda, \mu)$$

oss: In questo caso $[(\lambda, \mu)] = [(0, 1)]$

è radice del polinomio con molteplicità

$k+1$.

Abbiamo quindi $G(\lambda, \mu) = \mu^{k+1} S(\lambda, \mu)$

e $S(\lambda, \mu)$ è omogeneo di grado $d-k-1$

osserviamo che $g_{k+1} \neq 0 \Rightarrow S(0, 1) = g_{k+1} \neq 0$

quindi tutte le coppie che soddisfanno $S(\lambda, \mu) = 0$

sono del tipo $[(\lambda, \mu)]$ con $\lambda \neq 0$

$$= [(\lambda, \mu/\lambda)].$$

come prima possiamo

$$\xi = \mu/\lambda$$

$$H'(\xi) := S(1, \xi)$$

ed osserviamo che

a) $\deg H' = d - k - 1$

b) H' è omogeneo

c) Ad ogni radice di H'

corrisponde una ed una

sola classe di prop. $[(\lambda, \mu)]$

soluzione di $S(\lambda, \mu) = 0$

e viceversa.

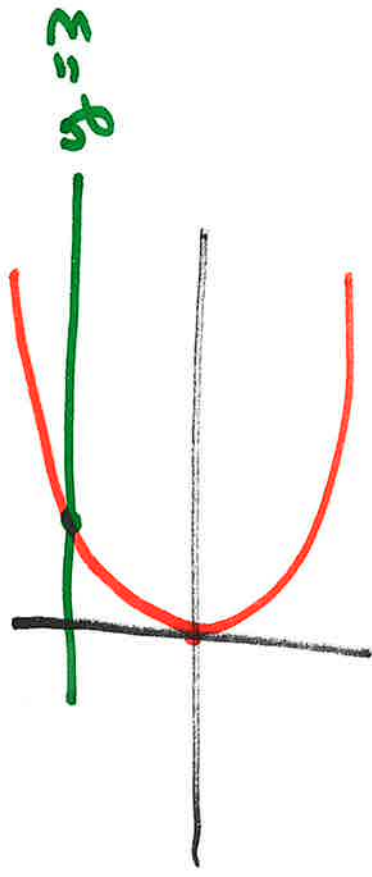
$\Rightarrow H'(\xi) = 0$ ci dà $d - k - 1$ punti di $\mathbb{A}^1 \cong \tilde{V}(F)$

$(0, 1)$ è soluzione $k+1$ volte di $\mathbb{A}^1 \cong \tilde{V}(F)$

$$\text{Totale} = (d - k - 1) + (k + 1) = d$$

□

$$\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$



$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad \text{F.V.E.}$$

$$\begin{cases} x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 x_3 - 9x_3^2 = 0 \\ x_3 (x_1 - 9x_3) = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow \text{solutione } [1 \ 0 \ 0]$$

$$x_3 \neq 0 \rightarrow [9 \ 3 \ 1]$$

$$\text{OSSERVAZIONE:} \quad \begin{matrix} \text{Se} & F(x_1, x_2, x_3) = 0 & \Rightarrow & \tilde{V}(F \cdot G) = \tilde{V}(F) \cup \tilde{V}(G) \\ & G(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(F \cdot G) &= \{X : F(X) = 0 \text{ oppure } G(X) = 0\} = \\
 &= \{X : F(X) = 0\} \cup \{X : G(X) = 0\} = \\
 &= \tilde{\mathcal{V}}(F) \cup \tilde{\mathcal{V}}(G)
 \end{aligned}$$

~~Improvvisamente~~ vale la proprietà che se

$$\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{V}}(F) \cup \tilde{\mathcal{V}}(G) \Rightarrow \text{esistono polinomi}$$

$$F' \text{ e } G' \text{ tali che } \begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}(F) &= \tilde{\mathcal{V}}(F') \\ \tilde{\mathcal{V}}(G) &= \tilde{\mathcal{V}}(G') \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{V}}(F \cdot G)$$

In generale una curva algebrica

$$\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{V}}(H) \text{ tale che } \exists F, G \text{ con } \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{V}}(F) \cup \tilde{\mathcal{V}}(G)$$

è detta irriducibile.

Si dice anche che questa curva si spezza
nell'unione di $\tilde{V}(F)$ e $\tilde{V}(G)$.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ se $C = \tilde{V}(H)$ è irriducibile

e $C = \tilde{V}(F) \cup \tilde{V}(G) \Rightarrow \exists$ due polinomi

F' e G' tali che $H = F' \cdot G'$ e

$\tilde{V}(F) = \tilde{V}(F')$, $\tilde{V}(G) = \tilde{V}(G')$.

$x^2 + y^2 = 0$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Esempio:

$(x+iy)(x-iy) \rightarrow$ è unione di 2 rette.

invece: $\tilde{V}(x^2 + y^2)^3$

A è riducibile in $\mathbb{P}^2$ $\Leftrightarrow C = \tilde{V}(H)$ ed il polinomio H si fattorizza.

DEF: Sia $P \in C$ un punto.

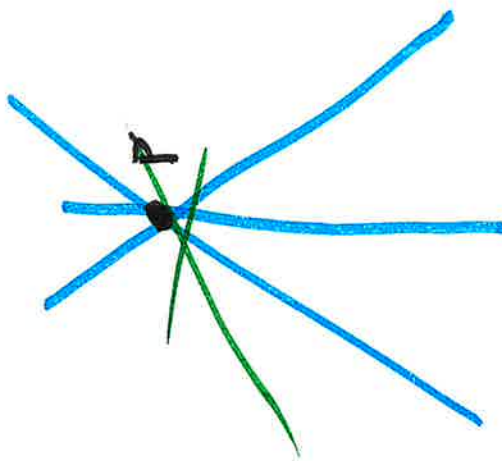
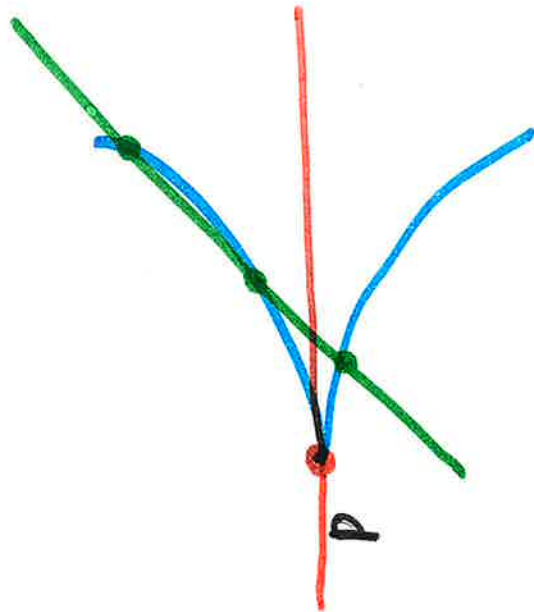
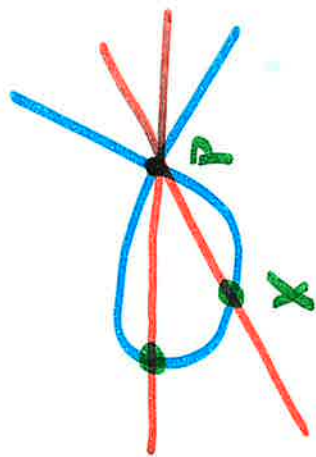
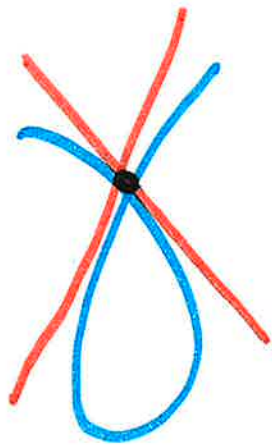
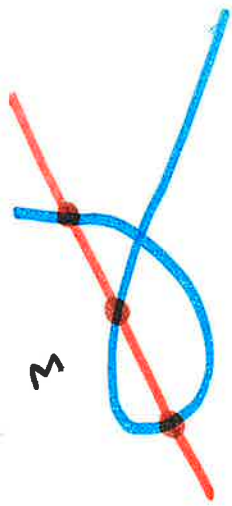
Si dice che P è un punto

multiplo (k -uplo) per C se ogni retta passando per P interseca C in P almeno k volte

($\Rightarrow$ le intersezioni diverse da P sono al più $d-k$) ed esistono k rette per P (contate con le debite molteplicità) che intersecano C in P $k+1$ volte.



Curves di III ordine



COROLLARIO: Sia $E = \tilde{U}(F)$ una curva algebrica di

ordine d . Allora

- 1) E non ha punti k -upli con $k > d$
- 2) Se E ha un punto d -uplo $\Rightarrow E$ è unione di d rette per quel punto.

DIM 1) Se E avesse un punto P k -uplo con $k > d$
 $\Rightarrow$ ogni retta per P intersecherebbe E
 $k > d$ volte $\Rightarrow$ ogni retta per P sarebbe
contenuta in $E \Rightarrow E = \mathbb{P}^2$ $\Rightarrow$ assurdo.

2) Sia $E = \tilde{U}(F)$ una curva algebrica e
P un suo punto d -uplo.

OSSERVIAMO CHE IN $\mathbb{P}^2$ una curva algebrica non può avere solo un punto.

Infatti ogni retta non per P interseca

$\mathcal{C}$ in d punti: $\neq$ diversi da P

CONSIDERIAMO DUNQUE $Q \in \mathcal{C}$ con $Q \neq P$

$\Rightarrow$ la retta PQ interseca $\mathcal{C}$

in almeno $d+1$ punti: $\Rightarrow$

$PQ \subseteq \mathcal{C}$ e l'equazione di $\mathcal{C}$

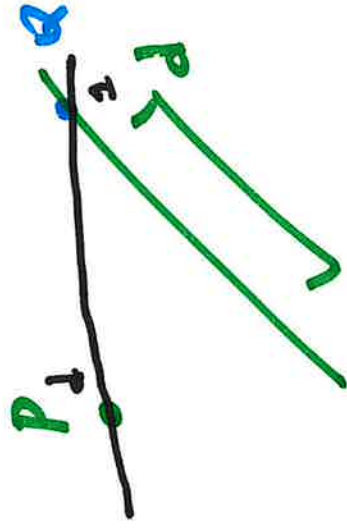
si fattorizza come $F = G \cdot H$

con $\deg G = d-1$, $\deg H = 1$

e $V(H) = \text{retta } PQ$.

Il punto P è ora un punto $(d-1)$ -uplo

per $V(G)$. Se $d-1 > q$ applichiamo lo



stesso ragionamento di cui sopra e
mostriamo che $G = G' H'$ con $\deg G' = \deg G - 1$
 $\deg H' = 1$

e $\tilde{V}(H')$ retta per P .

Dopo il passaggio abbiamo fattorizzato F
nel prodotto di d polinomi di grado 1 $\square$

oss

Sia $F(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado ≥ 1

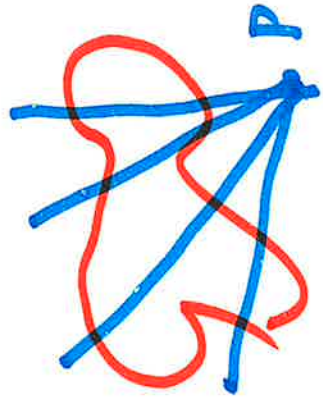
$$\Rightarrow |\tilde{V}_C(F)| = \infty$$

[Una curva algebrica su $\mathbb{C}$ ha sempre ∞ punti.]

DM: OGNI RETTA INTERSECA $\tilde{V}_C(F)$ in almeno un punto.

Sia $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ un punto non in $\tilde{V}_C(F)$. Ogni retta del fascio

per P inverses $\tilde{V}_c(F)$ in almeno un punto distinto
 nullo e altre. $\Rightarrow \# \tilde{V}_c(F) = \infty$



$$|\tilde{V}_c(F)| \approx d \cdot \omega^2 = \infty^2$$

$$(y - x^2)(y + x^2)$$

